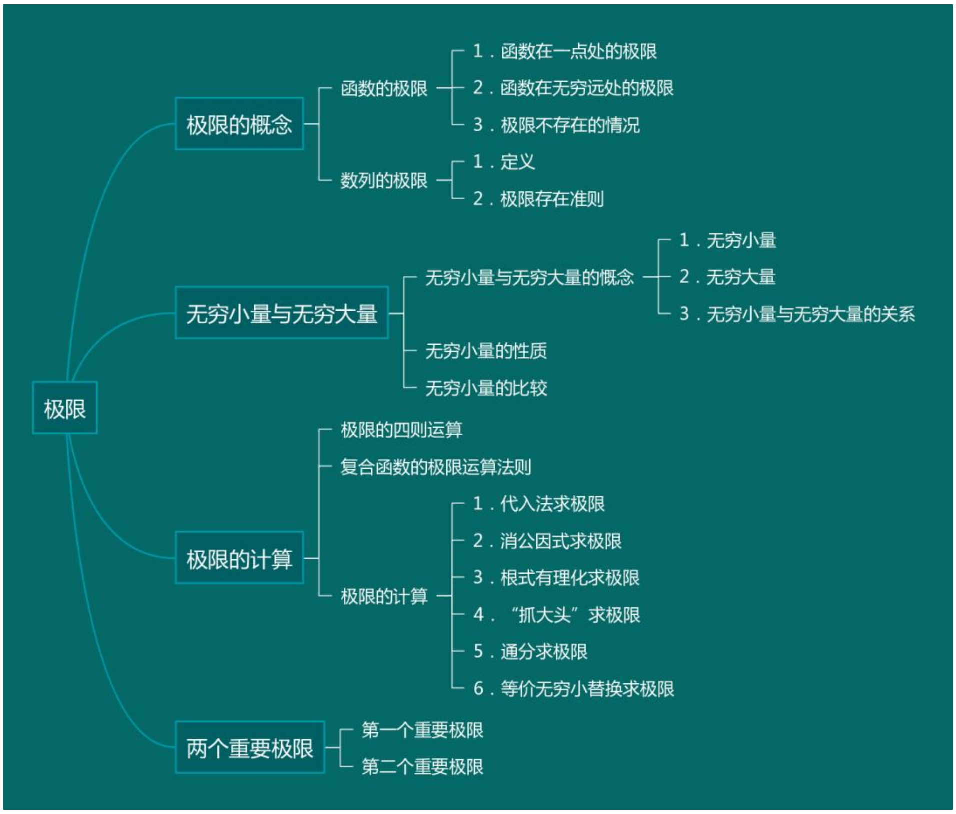
第二节 极限★★★



一、极限的概念

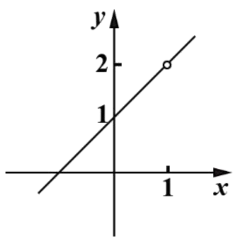
知识点 1：函数的极限

1． $x \to x_0$ 时函数的极限

定义 1 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义，当 $x \to x_0\ (x \neq x_0)$ 时，$f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A .$$

例 1 观察函数图形 $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$，当 x 无限趋于 1 时，函数的极限和在 $x = 1$ 处的函数值.



【答案】因函数 $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ 在 $x = 1$ 处无定义，故函数值不存在. 但当 $x \to 1$ 时，$f(x)$ 无限趋近于常数 2，即函数的极限为 2. 我们在判断函数当 $x \to x_0$ 时的极限时，关注的是 $f(x)$ 在 x_0 附近的

变化趋势，而不是 $f(x)$ 在 x_0 这一孤立点上的情况，所以当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 有没有极限与 $f(x)$ 在点 x_0 处有没有定义无关.

考点 1. **函数 $f(x)$ 在点 x_0 处是否有定义与极限是否存在无关.** ★

考题 1 函数 $f(x)$ 在 $x \to 1$ 的极限 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 与函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的取值是否有关系？

【答案】无关

自主练习 1 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有定义是极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的________条件.

A. 相关　　　　　　　　　　B. 无关

【答案】无关

解析：函数在一点处有没有定义与在这一点极限是否存在没有关系.

定义 2 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一个左侧邻域内有定义，当 x 从 x_0 的左侧（即 $x<x_0$）无限接近于 x_0（记为 $x \to x_0^-$）时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限，记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A.$$

定义 3 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一个右侧邻域内有定义，当 x 从 x_0 的右侧（即 $x>x_0$）无限接近于 x_0（记为 $x \to x_0^+$）时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的右极限，记为

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A.$$

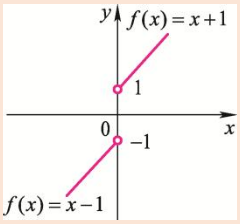
定理 1（极限存在定理）

函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时极限存在的充分必要条件：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$.

考点 2. **极限存在定理★★**

考题 2 函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x+1, & x>0, \end{cases}$ 研究当 $x \to 0$ 时 $f(x)$ 是否存在极限？

【答案】极限不存在

解析：

由于 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x-1) = -1$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x+1) = 1$，左、右极限存在，但不相等，故 $x \to 0$ 时 $f(x)$ 的极限不存在.

自主练习 2 $f(x)=\frac{|x|}{x}$ 当 $x\to 0$ 时的左极限_______、右极限_______，在 $x\to 0$ 时的极限_______.

A. 1　　　　B. -1　　　　C. 不存在

【答案】B；A；C

解析：当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的左极限 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$；当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的右极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$；左、右极限存在但不相等，故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

2. **$x\to\infty$ 时函数的极限**

定义 4 当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限或函数收敛于 A，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

类似地，可以分别定义 $x\to-\infty$ 和 $x\to+\infty$ 时的极限为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

例 2 计算下列极限：（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=$________；（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1000}{x}=$________.

【答案】（1）0（2）0

例 3 计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=$________；（2）$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=$________；

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=$________；（4）$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=$________.

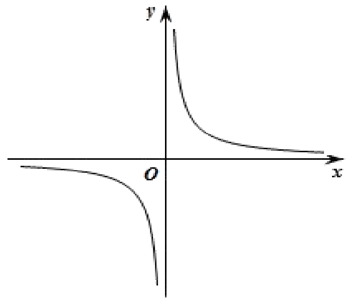
【答案】（1）$+\infty$（2）0（3）$\frac{\pi}{2}$（4）$-\frac{\pi}{2}$

定理 2（极限存在定理）

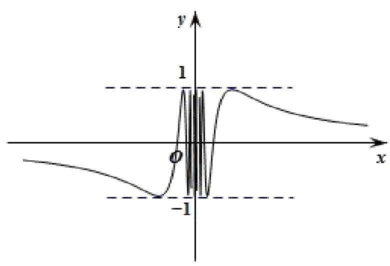
函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时极限存在的充分必要条件：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

3. **极限不存在的情况**

根据图中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图像，观察当 x 无限趋近于 0 时，对应函数值的变化情况.



$f(x)=\frac{1}{x}$



$g(x)=\sin\frac{1}{x}$

例 4 判断下列极限是否存在：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$；（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$；（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$；

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$；（6）$\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$.

【答案】（1）$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，左、右极限不相等，即极限不存在；

（2）$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x}=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x}=+\infty$，左、右极限不相等，即极限不存在；

（3）$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$，极限为无穷，所以极限不存在；

（4）$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=1$，左、右极限不相等，即极限不存在；

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 振荡不存在；

（6）$\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ 振荡不存在.

考点 3. 函数极限不存在的常见情况★★

①$\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{x}$（由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x}=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x}=+\infty$）.

②$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$.

③$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$.

④$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan x=-\infty$；$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$，$\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$.

⑤$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$（由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$）.

考题 3 下列极限不存在的是（ ）

A. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-1}{x-1}\right)$ B. $f(x)=\begin{cases}x^2, & x>0\\ 2x, & x\le 0\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$ D. $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}$

【答案】D

解析：A. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$；

B. $f(x)=\begin{cases}x^2, & x>0\\ 2x, & x\le 0\end{cases}$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}2x=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x^2=0$，故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$；

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$；

D. $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，故答案选 D.

技巧：考虑左、右极限的情况

（1）分段函数的分段点，例如 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x>0\\ 2x, & x\le 0\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$；

（2）出现绝对值时，例如 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$；

（3）出现 e^{∞}、$\arctan\infty$ 等这样的形式时，例如 $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$.

自主练习 3 下列函数中，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在的是（ ）

A. $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ B. $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ C. $f(x)=\frac{1}{x}$ D. $f(x)=\arctan\frac{1}{|x|}$

【答案】D

解析：A 选项不存在，同理 B 选项不存在，C 选项中 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$，D 选项中 $\lim\limits_{x\to 0}\arctan\frac{1}{|x|}=\frac{\pi}{2}$，因此选 D.

知识点 2：数列的极限

1. 数列极限的定义

定义 5 按照某一法则，对每个 $n\in\mathbf{N}^*$，对应着一个确定实数 x_n，这些实数按照下标 n 从小到大排列得到一个序列 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$，该序列就称为数列，记作 $\{x_n\}$. 数列中的每一个数称为数列的项，第 n 项 x_n 称为该数列的通项.

定义 6 设 $\{x_n\}$ 为一数列，如果存在常数 a，当 n 无限增大时，x_n 无限趋近于 a，那么就称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 当 n 趋于无穷时的极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \text{ 或 } x_n\to a\ (n\to\infty).$$

如果不存在这样的常数 a，就称数列 $\{x_n\}$ 无极限，或数列 $\{x_n\}$ 是发散的，也可以说 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

例如，数列 $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$，当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{2^n}\to 0$，数列有极限，即数列收敛；

数列 $2,4,8,16,\cdots,2^n,\cdots$，当 $n\to\infty$ 时，$2^n\to\infty$，数列没有极限，即数列发散；

数列 $-1,1,-1,1,\cdots,(-1)^n,\cdots$，当 $n\to\infty$ 时，$|x_n|\to 1$，但 x_n 交替为 1 和 -1，没有接近于一个确定的常数，因此数列也没有极限，即数列发散.

例 5 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=$________.

【答案】$\frac{1}{2}$

解析：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\frac{1}{2}$.

2. **数列极限存在准则**

准则 1（单调有界准则） 单调有界的数列必定收敛.

注：数列有界时，数列不一定收敛. 如数列 $x_n=\sin n$，$|x_n|\leqslant 1$，数列有界，但数列在 1 和 -1 之间振荡，数列发散.

准则 2（两边夹准则） 三个数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$，如果存在自然数 N_0，当 $n>N_0$ 时，有 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

数列极限存在准则可以推广到函数极限.

考点 4. 数列收敛与数列有界的关系★

技巧：数列收敛 $\Rightarrow$ 数列有界；数列有界 $\nRightarrow$ 数列收敛；数列单调有界 $\Rightarrow$ 数列收敛.

考题 4 下列结论不正确的是（ ）

A. 单调有界数列必有极限

B. 极限存在的数列必为有界数列

C. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充分必要条件是左、右极限都存在

D. 0 是无穷小量

【答案】C

解析：极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充要条件是左、右极限都存在且相等. 故选 C.

考点 5. 两边夹准则★

技巧：规整不动，先猜后证.

考题 5 用两边夹准则求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$.

【答案】因为 $\left(\dfrac{n}{n^2+n}+\dfrac{n}{n^2+n}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)\leq\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)\leq\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+1}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+1}\right)$，所以 $\dfrac{n^2}{n^2+n}\leq\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)\leq\dfrac{n^2}{n^2+1}$，又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+n}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+1}=1$，由两边夹准则可知，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)=1$.

自主练习 4 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$.

【答案】由于 $\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\leq\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\leq\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{n+1}$，即 $\dfrac{n}{n+\sqrt{n}}\leq\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\leq\dfrac{n}{n+1}$，又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$，利用两边

夹准则，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\right)=1$.

考点总结

考点 1. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处是否有定义与极限是否存在无关. ★

考点 2. 极限存在定理★★

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$；（2）$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

考点 3. 函数极限不存在的常见情况★★

①$\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^x$（由于$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$）.

②$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$.

③$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$，$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$.

④$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan x=-\infty$；$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$，$\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$.

⑤$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$（由于$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$）.

考点 4. 数列收敛与数列有界的关系★

考点 5. 两边夹准则★

通关练习

1. 数列$\{x_n\}$单调，则$\{x_n\}$必收敛（　　）[真题]

【答案】×

解析：数列$\{x_n\}$单调且有界，则$\{x_n\}$必收敛，故错误.

2. 设函数$f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ 2, & x=0,\\ \cos x, & x>0,\end{cases}$ 则$\lim\limits_{x\to0}f(x)=$（　　）[真题]

A. 1　　B. 2　　C. 1 或 2　　D. 不存在

【答案】A

解析：$\lim\limits_{x\to0^-}(x+1)=1$，$\lim\limits_{x\to0^+}\cos x=1$，则$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$. 故选 A.

3. 已知三个数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$和$\{c_n\}$满足$a_n\le b_n\le c_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=c$（a，c 为常数，且$a<c$），则数列$\{b_n\}$必定（　　）[真题]

A. 有界　　　　B. 无界　　　　C. 收敛　　　　D. 发散

【答案】A

解析：根据收敛数列的有界性定理可知，数列$\{a_n\}$和$\{c_n\}$均为有界数列，又$a_n \le b_n \le c_n$，从而数列$\{b_n\}$必定有界．故选 A.

4. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=$（　　）[变式]

A. 1　　　　B. 0　　　　C. 2　　　　D. 4

【答案】A

解析：由于$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$，

而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$，

由两边夹准则有$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.

5. 设函数$f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}, x\ne 0,\\ 0, x=0\end{cases}$则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$（　　）[变式]

A. -1　　　　B. 0　　　　C. 1　　　　D. 不存在

【答案】D 解析：$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1$，则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在．故选 D.